

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a XII-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ și legea de compoziție,

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

5,5p a) Arătați că funcția f este bijectivă.

10p b) Demonstrați că $f(x * y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

7p c) Arătați că legea de compoziție ” $*$ ” este asociativă.

Soluție:

$$a) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ este strict crescătoare pe } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ este injectivă}$$

2p

$$\text{Funcția } f \text{ este continuă pe } \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}$$

2,5p

f funcție injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă

1p

$$b) f(x * y) = \ln(x * y + \sqrt{(x * y)^2 + 1})$$

$$(x * y)^2 + 1 = (x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1 = x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) +$$

5p

$$+ 2xy\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{y^2 + 1} + 1 =$$

$$= (\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{y^2 + 1} + xy)^2$$

$$f(x * y) = \ln(x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{y^2 + 1} + xy) =$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) =$$

5p

$$= f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$c) \text{ Trebuie să arătăm că } (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

1p

$$f((x * y) * z) = f(x * y) + f(z) = f(x) + f(y) + f(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

4p

$$f(x * (y * z)) = f(x) + f(y * z) = f(x) + f(y) + f(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Funcția f este injectivă și $f((x * y) * z) = f(x * (y * z)), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

2p

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

11,5p a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea.

11p b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup cu o infinitate de elemente.

Soluție:

a) Fie $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, a_1^2 - 3b_1^2 = 1$, adică $\det M_1 = 1, a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$,

$M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, a_2^2 - 3b_2^2 = 1$, adică $\det M_2 = 1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + 3b_1 b_2 & 3a_1 b_2 + 3b_1 a_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 + 3b_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z};$

6p

$\det M_1 M_2 = \det M_1 \cdot \det M_2 = 1$, așadar $M_1 M_2 \in G$ și G parte stabilă

5,5p

b)

Asociativitate

3p

I_2 element neutru

3p

$M' = \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$, este inversa lui M

3p

Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$

1p

Toate puterile naturale ale lui A sunt distincte,
deci G are o infinitate de termeni.

1p

SUBIECTUL 3 (22,5p)

7,5p a) Arătați că $\ln(1+x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$.

15p b) Demonstrați că $\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \frac{e^3 - 1}{2e^4}$.

SUPLIMENTUL GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

a) Fie $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x$

Avem $f'(x) = -\frac{x}{x+1}, \forall x \in (-1, \infty)$.

2,5p

$f'(x) > 0, \forall x \in (-1, 0)$ implică f strict crescătoare pe intervalul $(-1, 0)$,

$f'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$, implică f strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$,

3p

Deducem $x = 0$ punct de maxim absolut $\Rightarrow f(x) \leq f(0), \forall x \in (-1, \infty) \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$.

2p

b) Conform subpunctului a) se obține :

3p

$$\ln(1 + e^{-x^2}) < e^{-x^2}, \text{ deoarece } e^{-x^2} > 0$$

$$\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \int_1^2 x e^{-x^2} dx$$

2p

$$\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \int_1^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^2$$

8p

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e} \right) = \frac{e^3 - 1}{2e^4}$$

2p

De unde rezultă $\int_1^2 x \ln(1 + e^{-x^2}) dx < \frac{e^3 - 1}{2e^4}$

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Se consideră funcția $f: [2026, 2027] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-2025).$$

11,5p a) Calculați $\int_{2026}^{2027} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

11p b) Calculați $\int_{2026}^{2027} \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx$.

Soluție:

$$a) \int_{2026}^{2027} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) \Big|_{2026}^{2027} = \ln \frac{f(2027)}{f(2026)} =$$

8p

$$\ln \frac{2026!}{2025!} = \ln 2026.$$

3,5p

$$b) \int_{2026}^{2027} \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx = \int_{2026}^{2027} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' dx = \frac{f'(x)}{f(x)} \Big|_{2026}^{2027} =$$

8p

$$= \frac{1}{2026} + \frac{1}{2025} + \dots + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2025} + \dots + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2026} - 1 = \frac{-2025}{2026}$$

3p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

ISJ Prahova