

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026 –

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

10,5p a) Să se determine numărul real $m > 0$ pentru care $\log_{2^6} m + \log_{2^{12}} m + \log_{2^{20}} m + \log_{2^{30}} m = 2026$

12p b) Se consideră numerele $a, b \in (1, \infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\log_{a^6} b + \log_{a^{12}} b + \log_{a^{20}} b + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} b = \frac{7}{18} \log_a b$

Prof. Sânziana Dumitran

Soluție:

$$\text{a)} \log_{2^6} m + \log_{2^{12}} m + \log_{2^{20}} m + \log_{2^{30}} m = 2026 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \log_2 m + \frac{1}{12} \log_2 m + \frac{1}{20} \log_2 m + \frac{1}{30} \log_2 m = 2026 \quad 3,5p$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \log_2 m + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \log_2 m + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \log_2 m + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \log_2 m = 2026 \quad 3p$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \log_2 m = 2026 \Leftrightarrow m = 2^{6078} \quad 4p$$

$$\text{b)} \log_{a^6} b + \log_{a^{12}} b + \log_{a^{20}} b + \dots + \log_{a^{n(n+1)}} b = \frac{7}{18} \log_a b \quad 3p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \log_a b + \frac{1}{12} \log_a b + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \log_a b = \frac{7}{18} \log_a b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \log_a b = \frac{7}{18} \log_a b \quad 5p$$

$$\text{Cum } \log_a b \neq 0, \text{ deoarece } a, b \in (1, \infty), \text{ avem } \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{7}{18} \Leftrightarrow n = 8 \quad 4p$$

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Se consideră funcția $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, dată de $f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$.

11,5p a) Să se calculeze $\left(\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}\right)^2, x \in (1, \infty)$.

11p b) Să se arate că f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Soluție:

$$\text{a)} \left(\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}\right)^2 = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-x+1} \quad 6p$$

$$= 2\sqrt{x} + 2, x \in (1, \infty).$$

5,5p

$$b) f^2(x) = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 2$$

6p

și cum codomeniul este $(0, \infty)$, avem funcția constantă $f: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{2}$

2p

Care nu este nici injectivă, nici surjectivă.

3p

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Determinați $z_1, z_2 \in \{z = x + yi | x, y \geq 0\}$ cu $z_1 \cdot z_2 = 2i$ și $|z_1 + z_2| = 2$

SUPLIMENT GAZETA MATEMATICĂ

Fie $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, cu $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ deoarece $x, y \geq 0$.

2,5p

$$z_1 \cdot z_2 = 2i \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)) = 2i$$

$$\text{Dar } 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \text{ de unde se obține } \begin{cases} r_1 r_2 = 2 \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

4p

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\beta) + i(r_1 \sin\alpha + r_2 \sin\beta)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow r_1^2 \cos^2\alpha + 2r_1 r_2 \cos\alpha \cos\beta + r_2^2 \cos^2\beta + r_1^2 \sin^2\alpha + 2r_1 r_2 \sin\alpha \sin\beta + r_2^2 \sin^2\beta = 4$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 + 4 \cos(\alpha - \beta) = 4 \Leftrightarrow r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + 4 \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

4p

$$(r_1 - r_2)^2 + 4 \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$(r_1 - r_2)^2 \geq 0$$

2p

$$\text{Din } \alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \alpha - \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) \geq 0$$

$$\text{Atunci } r_1 - r_2 = 0 \text{ și } \cos(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$$

3p

$$r_1 - r_2 = 0 \text{ și } r_1 r_2 = 2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \sqrt{2}$$

2p

$$\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ și } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ de unde avem:}$$

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$$

2p

$$\text{Obținem } (z_1, z_2) \in \{(\sqrt{2}, i\sqrt{2}), (i\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

3p

SUBIECTUL 4 (22,5p)

Arătați că singura funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relațiile $f(x) \leq x$ pentru orice x real și $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pentru orice x, y reale, este funcția identică

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$.

Soluție:

$x = 0$ în prima relație implică $f(0) \leq 0$ iar $x = y = 0$ în a doua implică $f(0) \geq 0$, deci $f(0) = 0$;

$y = -x$ în a doua relație rezultă $f(x) + f(-x) \geq f(0) = 0$;

Cum $f(x) \leq x$ și $f(-x) \leq -x$, avem $f(x) + f(-x) \leq 0$, deci f impară.

Așadar $x \geq f(x) = -f(-x) \geq -(-x) = x$, deci $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

4,5p

4p

4p

5p

5p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.