

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026–

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1 (22,5p)

11p a) Demonstrați că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

11,5p b) Demonstrați că

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot (1 + 3) + 5 \cdot (1 + 3 + 5) + \dots + (2n - 1) \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] \\ = \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prof. Claudiu Militaru

Soluție:

a) $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

Putem folosi metoda inducției matematice:

Verificare: $P(1)$: $1=1^2$

4p

Demonstrație: $P(k) \rightarrow P(k+1)$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2k + 1] =$$

4p

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2, \text{ deci } P(k + 1) \text{ este adevărată și } P(n) \text{ adevărată pentru orice } n$$

3p

natural, nenul.

b)

Propoziția devine $Q(n)$: $1 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2n - 1) \cdot n^2 = \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4p

Verificare: $Q(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ adevărat;

3p

Demonstrație: $Q(k) \rightarrow Q(k+1)$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2k + 1) \cdot (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(3k^2+k-1)}{6} + (2k + 1) \cdot (k + 1)^2 =$$

2,5p

$$\frac{(k+1)(k+2)(3(k+1)^2+k+1-1)}{6}, \text{ deci } Q(k + 1) \text{ este adevărată și } Q(n) \text{ adevărată pentru orice } n$$

2p

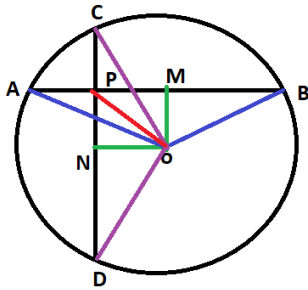
natural, nenul.

SUBIECTUL 2 (22,5p)

Coardele AB și CD ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$, situate la distanțele 6, respectiv 8 de centrul cercului sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P . Se consideră punctele M și N mijloacele coardelor AB , respectiv CD .

7,5p a) Să se arate că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

15p b) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$



a)

În triunghiul AOM, avem $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$

2p

În triunghiul BOM, avem $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$

2p

Se obține $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, deoarece

3,5p

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$, de unde rezultă concluzia.

b) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}$,

8p

$\vec{u} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4 \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4 \cdot \overrightarrow{PO} + 2 \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$

2p

OMP_N este dreptunghi deoarece are trei unghiuri drepte (de unde rezultă că toate unghiurile patrulaterului OMP_N sunt drepte)

2p

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{PO}$

2p

$|\vec{u}| = |2 \cdot \overrightarrow{PO}| = 2 \cdot PO = 20$

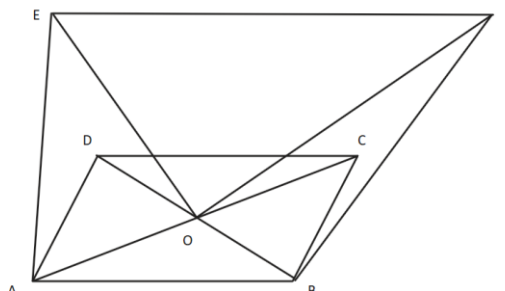
1p

SUBIECTUL 3 (22,5p)

Fie $ABCD$ un patrulater și O intersecția diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele E și F astfel încât D și C sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AEO și BFO . Știind că $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:



Considerăm O reper;

D centrul de greutate al triunghiului AEO , deci $3\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$. 5p

C centrul de greutate al triunghiului BFO , deci $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$. 5p

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ 6p

Așadar $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$, de unde avem $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, deci ABCD paralelogram. 6,5p

SUBIECTUL 4 (22,5p)

10,5p a) Să se arate că dacă $x > 1$, atunci este verificată inegalitatea:

$$x\sqrt{x-1} \geq 2(x-1)$$

12p b) Se consideră numerele $a, b, c > 1$, astfel încât $a + b + c = 6$.

Să se arate că $a\sqrt{a-1} + b\sqrt{b-1} + c\sqrt{c-1} \geq 6$. În ce caz are loc egalitatea?

Prof. Gheorghe Crăciun

a) $x\sqrt{x-1} \geq 2(x-1) \Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 4(x-1)^2 \Leftrightarrow$ 5,5p

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 \geq 0$, adevărat, deoarece $x > 1$ și $(x-2)^2 \geq 0, \forall x \in (1, \infty)$ 5p

b) Aplicăm succesiv inegalitatea demonstrată la a) și obținem :

$$a\sqrt{a-1} \geq 2(a-1) \quad \text{6p}$$

$$b\sqrt{b-1} \geq 2(b-1)$$

$$c\sqrt{c-1} \geq 2(c-1)$$

Adunând inegalitățile de mai sus membru cu membru se obține :

$$a\sqrt{a-1} + b\sqrt{b-1} + c\sqrt{c-1} \geq 2(a+b+c) - 6 \Rightarrow \quad \text{2p}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{a-1} + b\sqrt{b-1} + c\sqrt{c-1} \geq 6 \quad \text{2p}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $(a-1)(a-2)^2 + (b-1)(b-2)^2 + (c-1)(c-2)^2 = 0, a, b, c > 1 \Leftrightarrow a = b = c = 2$ 2p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.